# Universidad Nacional Autónoma de México

## *Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades*

## **Plantel Vallejo**

Clase abierta a los alumnos de Matemáticas 2, unidad 1.

# "Funciones cuadráticas"

Elaboraron: ***Prof. Polo Francisco Padilla Monroy***

***Prof. Wilbert De Jesús López***

*Programa de Asesorías Preventivas y Remediales Presenciales de Área de Matemáticas*

**22 de Enero del 2010**

Elaboración: ***Prof. Polo Francisco Padilla Monroy***
***Prof. Wilbert de Jesús López***

# Problema

Con 380 metros lineales de malla, se desea cercar un terreno rectangular y colocar una división central tal como se muestra en la Figura 1.

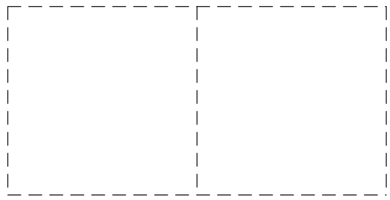

Figura 1

¿Cómo deben de distribuirse estos 380 metros de malla, de tal forma que se cerque la mayor área posible?

**Solución:**

Se utilizan literales para representar las dimensiones del terreno (incógnitas), llámese ***b*** el lado más largo y ***h*** el lado más corto tal como se muestra en la Figura 2.

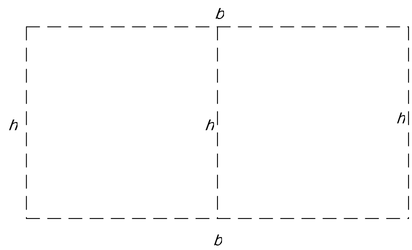


Figura 2

El área del terreno, que denotaremos como ***A***, se calcula como: $A = bh$

Al analizar la Figura 2 se obtiene la siguiente ecuación: $b + b + h + h + h = 380$

Que es equivalente a: $2b + 3h = 380$

Se despeja alguna de las dos incógnitas, por ejemplo ***h***: $3h = 380 - 2b$

$$h = \frac{380 - 2b}{3}$$

Esta última ecuación se sustituye en ***A***: $A = b\left(\frac{380 - 2b}{3}\right)$

Se desarrolla y ordena: $A = \frac{380}{3}b - \frac{2}{3}b^2$

$$A = -\frac{2}{3}b^2 + \frac{380}{3}b$$

Elaboración: ***Prof. Polo Francisco Padilla Monroy***
***Prof. Wilbert de Jesús López***

Opcionalmente, enseguida de ***A*** se coloca la incógnita ***b*** entre paréntesis:

$$A(b) = -\frac{2}{3}b^2 + \frac{380}{3}b$$

Esta última ecuación recibe el nombre de función cuadrática, ya que el área del terreno depende o está en función de lo que valga la incógnita ***b*** la cual tiene como máximo exponente al número 2.

Por ejemplo para un valor de ***b*** = 50 el área del terreno se calcula como:

$$A(50) = -\frac{2}{3}(50)^2 + \frac{380}{3}(50)$$
$$A(50) = -\frac{2}{3}(2500) + \frac{19000}{3}$$
$$A(50) = -\frac{5000}{3} + \frac{19000}{3}$$
$$A(50) = \frac{14000}{3}$$
$$A(50) = 4666.7m^2$$

Recuerda, al utilizar esta función el área del terreno depende de lo que valga ***b***, es decir el área del terreno puede variar según varíe ***b***, por lo que en el ámbito de las funciones a la incógnita ***b*** se le conoce como variable independiente y ***A(b)*** como variable dependiente.

**¿Qué valores puede tomar la variable independiente *b*?**

Analizando la función cuadrática, $A(b) = -\frac{2}{3}b^2 + \frac{380}{3}b$, se concluye que la variable independiente puede tomar cualquier valor, es decir no existe algún valor de ***b*** que produzca una indeterminación. Pero analizando la Figura 2 y teniendo en cuenta que sólo se dispone de 380 metros de malla, se concluye que ***b*** en la realidad puede tomar valores entre 0 y 190 metros.

Se puede realizar una tabla de valores de ***b*** y calcular el de ***A(b)*** para analizar el comportamiento gráfico de la función cuadrática (tanto la tabla como la gráfica se pueden realizar con Excel o con algún software graficador de funciones).

| ***b*** | ***A(b)*** |
|---|---|
| 0 | 0.0 |
| 10 | 1200.0 |
| 20 | 2266.7 |
| 30 | 3200.0 |
| 40 | 4000.0 |
| 50 | 4666.7 |
| 60 | 5200.0 |

| | |
|---|---|
| 60 | 5200.0 |
| 70 | 5600.0 |
| 80 | 5866.7 |
| 90 | 6000.0 |
| 100 | 6000.0 |
| 110 | 5866.7 |
| 120 | 5600.0 |
| 130 | 5200.0 |

| | |
|---|---|
| 140 | 4666.7 |
| 150 | 4000.0 |
| 160 | 3200.0 |
| 170 | 2266.7 |
| 180 | 1200.0 |
| 190 | 0.0 |

En la Figura 3 se muestra la gráfica de la función cuadrática, para este tipo de funciones la gráfica recibe el nombre de parábola la cual tiene algunos elementos como; vértice, eje de simetría, intersección con los ejes coordenados, concavidad (que en este caso es negativa), valor máximo $\boldsymbol{A_{max}}$ para el área ***A(b)*** y el valor $\boldsymbol{b_{max}}$ de ***b*** para el cual hay ese valor.

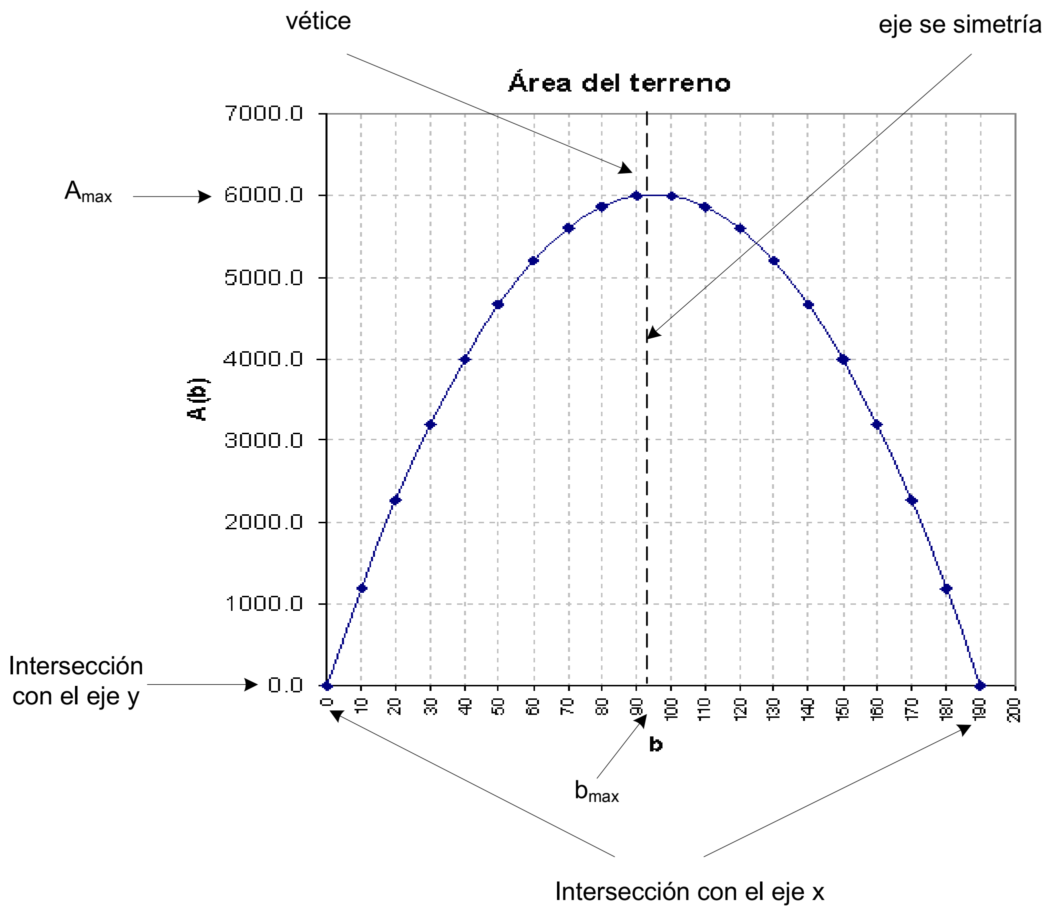


Figura 3

Con la gráfica ó con la tabla, se puede concluir que el área máxima que se puede cercar es aproximadamente 6000m$^2$ para un valor de ***b*** entre 90 y 100 metros.

**Determinación del área máxima por un método analítico.**

Un procedimiento consiste en transformar a la función cuadrática de su forma general a su forma estándar, es decir:

De la forma $y = ax^2 + bx + c$, transformarla a la forma $y = a(x-h)^2 + k$

Para realizar esta transformación se puede utilizar el siguiente proceso algorítmico:

De la función cuadrática original, que está en forma general: $A(b) = -\frac{2}{3}b^2 + \frac{380}{3}b$

El coeficiente del término cuadrático se hace positivo: $-A(b) = \frac{2}{3}b^2 - \frac{380}{3}b$

Y además que valga 1: $-3A(b) = 2b^2 - 380b$

$$-\frac{3}{2}A(b) = b^2 - 190b$$

Se completa el trinomio cuadrado perfecto (TCP) sumando en ambos lados de la igualdad la mitad del coeficiente del término lineal (con su signo) elevado al cuadrado.

$$-\frac{3}{2}A(b) + \left(\frac{-190}{2}\right)^2 = b^2 - 190b + \left(\frac{-190}{2}\right)^2$$

Se puede simplificar como:

$$-\frac{3}{2}A(b) + (-95)^2 = b^2 - 190b + (-95)^2$$

El TCP se expresa como un binomio al cuadrado:

$$-\frac{3}{2}A(b) + 9025 = (b-95)^2$$

Y se despeja ***A(b)***:

$$-3A(b) + 18050 = 2(b-95)^2$$

$$-3A(b) = 2(b-95)^2 - 18050$$

$$-A(b) = \frac{2}{3}(b-95)^2 - \frac{18050}{3}$$

$$A(b) = -\frac{2}{3}(b-95)^2 + \frac{18050}{3}$$

Esta última expresión es la función cuadrática expresada en forma estándar.

De la función en forma estándar se puede obtener la siguiente información:

Vértice: $V\left(95, \frac{1850}{3}\right) \approx V(95{,}6016.7)$

Concavidad: Negativa.

Valor máximo del área es $\mathbf{A_{max}}$ = 18050/3 m$^2$ ≈ 6016.7 m$^2$ para un valor de ***b*** = 95 metros.

Ecuación del eje de simetría: ***b*** = 95

**Conclusión:**

Los 380 metros de malla se deben de colocar tal como se muestra en la Figura 4 para cercar el terreno de mayor área (6016.7 m$^2$), nótese que en la parte inferior y superior se han colocado 95 metros que corresponde al valor de la incógnita ***b***, mientras que el los lados verticales se han colocado 63.3 metros que corresponde a la tercera parte de la diferencia entre los 380 metros de malla con el doble del valor de ***b***.

$$h = \frac{380 - 2b}{3}$$

$$h = \frac{380 - 2(95)}{3}$$

$$h = \frac{380 - 190}{3}$$

$$h = \frac{190}{3}$$

$$h \approx 63.3$$

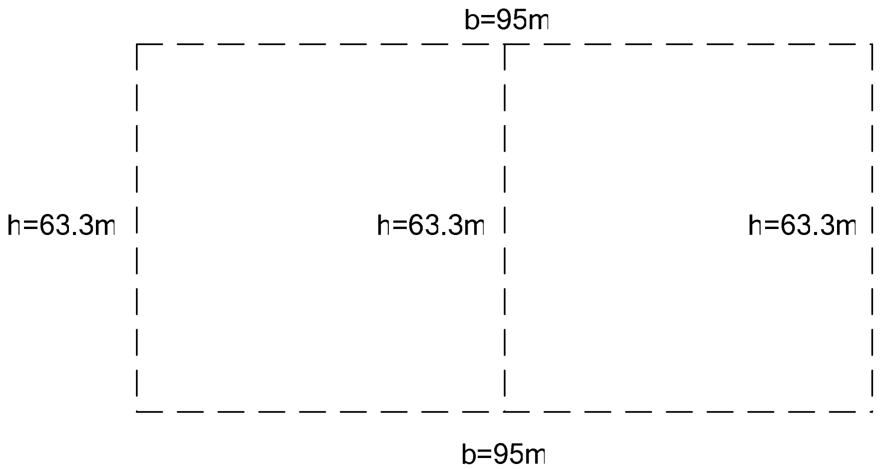


Figura 4

## Para resolver

Si se disponen de los mismos 380 metros de malla, pero ahora se desea cercar un terreno tal como se muestra en la Figura 5. Cómo debe de distribuirse la malla de tal forma que se cerque la mayor área posible si los terrenos rectangulares interiores deben ser del mismo tamaño.

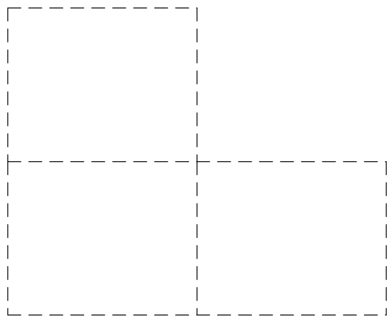

Figura 5

**Respuesta:** El área máxima que se puede cercar es $4332m^2$.

## Bibliografía:

Algebra y trigonometría con geometría analítica. Earl W. Swokowski, Segunda edición, Grupo Editorial Iberoamérica, Páginas 170 - 177.